ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΑΣΚΗΣΗ 6

α) Έστω $k \in K$ κ' $h \in H$. Τότε $hkh^{-1} \in K$ αφού $h \in G$.
Επομένως $hkh^{-1} \in K$ $\forall h \in H$, $\forall k \in K$. Άρα $K \triangleleft H$.

Αν $K \triangleleft H$ τότε δεν είναι κ' $K \triangleleft G$ απαραίτητα:

Έστω A_4 κ' $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$H = \langle (12)(34) \rangle$

η V είναι ισόμορφη με την ομάδα του Klein κ' είναι αβελιανή.

Θα δείξουμε ότι $H \triangleleft V \leq A_4$

κ' $H \ntriangleleft A_4$

άρα $\forall \sigma \in V$ έχω $\sigma H \sigma^{-1} = H$, άρα $\boxed{H \triangleleft V}$.

Αν τώρα $\pi = (123) \in A_4$

Έχω: $(123)\,(12)(34)\,(132) = (14)(23) \notin H$

άρα: $H \ntriangleleft A_4$.

β) Έστω $h_1, h_2 \in H$. Αρκεί ν.δ.ό. $(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})^{-1} \in gHg^{-1}$.

Έχουμε ότι:

$$(gh_1g^{-1})\cdot(gh_2g^{-1})^{-1} = (gh_1g^{-1})(gh_2^{-1}g^{-1}) =$$

$$= gh_1(g^{-1}\cdot g)\cdot h_2^{-1}\cdot g^{-1} = g(h_1h_2^{-1})g^{-1} \in gHg^{-1},$$

αφού $h_1h_2^{-1} \in H$.

γ) Έστω $g_1, g_2 \in G_H$. Τότε:

$$(g_1g_2)H(g_1g_2)^{-1} = (g_1g_2)H(g_2^{-1}g_1^{-1}) =$$

$$= g_1(g_2Hg_2^{-1})g_1^{-1} = g_1Hg_1^{-1} = H. \Rightarrow g_1g_2 \in G_H$$

Ακόμα: $e \in G_H$, αφού: $eHe^{-1} = \{ehe^{-1} \mid h \in H\} =$

$$= \{h \mid h \in H\} = H.$$

Τέλος: $g \in G_H \Rightarrow gHg^{-1} = H \Rightarrow$

$$Hg^{-1} = g^{-1}H \Rightarrow H = g^{-1}Hg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = g^{-1}H(g^{-1})^{-1} \Rightarrow g^{-1} \in G_H.$$

Άρα $G_H \leq G$.

δ) Έστω $g \in G_H$ και $h \in H$. Τότε:

$$ghg^{-1} \in H, \forall g \in G_H, h \in H.$$

Όμως: $H \leq G_H$, αφού: $\forall h_1, h_2 \in H$ είναι:

$$(e \cdot h_1 \cdot e) \cdot (e h_2 e)^{-1} = e h_1 h_2^{-1} e \in G_H$$, αφού

$h_1 h_2^{-1} \in H$.

Ακόμα, $H \triangleleft G_H$, αφού: $\forall g \in G_H$ είναι:

$$gHg^{-1} = H \Rightarrow gH = Hg.$$

Έστω ότι $\exists F \leq G$ με $H \triangleleft G_H$ και $G_H \subseteq F$, $H \triangleleft F$.

Έστω $f \in F$, τότε: $fHf^{-1} = H$ και $f \in G_H$. $\Rightarrow$

$F \subseteq G_H$.

Επομένως: $F = G_H$.

ε) Έστω $h, k \in H$ και $g \in G$. Τότε:

$$(g \cdot h \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot k \cdot g^{-1})^{-1} = g h g^{-1} g \cdot k^{-1} \cdot g^{-1} = g h k^{-1} \cdot g^{-1} \in g H g^{-1},$$

οπότε: $gHg^{-1} \leq G, \forall g \in G$.

Επομένως: $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} \leq H$.

στ) Έστω $a \in G$. Τότε:

$$a\left(\bigcap_{g \in G} gHg^{-1}\right) \cdot a^{-1} = \bigcap_{g \in G} a(gHg^{-1})a^{-1} =$$

$$= \bigcap_{g \in G} (ag)H(ag)^{-1} = \bigcap_{ag \in G} (ag)H(ag)^{-1} =$$

$$= \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

Επομένως η ομάδα $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ είναι κανονική υποομάδα της H.

Έχουμε λοιπόν ότι: $N \triangleleft H$.

Έστω τώρα $K \triangleleft G$. Θα δ.ό. $K \subseteq N$.

Έστω $k \in K$ και $g \in G$. Τότε:

$g \cdot k \cdot g^{-1} \in K \leq H$ και έτσι, για το τυχαίο $g \in G$, $k \in g^{-1}Hg$. Άρα: $K \in \bigcap gHg^{-1}, \forall g \in G$ και $K \subseteq N$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) Έχουμε ότι: $\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y) \Leftrightarrow (x\cdot y)^{-1}=x^{-1}\cdot y^{-1} \Leftrightarrow$

$$y^{-1}\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot y^{-1} \Leftrightarrow xy=yx$$

Αφού η απεικόνιση $\varphi: G\to G$ με $x\mapsto x^{-1}$ είναι 1-1 και επί, έπεται το ζητούμενο.

β) Έστω $g\in G$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Αν $|g|=\infty$, τότε:

- $|f(g)|=\infty \Rightarrow |g|=|f(g)|$
- $|f(g)|=m<\infty \Rightarrow (f(g))^{k}=e \Rightarrow$

$$(f(g))^{k}=f(e) \Rightarrow$$

$$f(g^{k})=f(e) \Rightarrow$$

$$g^{k}=e, \text{ άτοπο}.$$

ii) Αν $|g|=n<\infty$, τότε:

$f(g^{n})=f(e)=e \Rightarrow (f(g))^{n}=e \Rightarrow |f(g)|\,/\,n$.

- Αν $|f(g)|=m<n$, τότε: $(f(g))^{m}=e \Rightarrow f(g^{m})=f(e) \Rightarrow$

$$g^{m}=e, \text{ άτοπο}.$$

- Επομένως $|f(g)|=m$.

Έστω τώρα $g \in G$ και x στη κλάση συζυγίας του g.

Τότε: $x = h^{-1} \cdot g \cdot h$ για κάποιο $h \in G$. Άρα:

$$f(x) = f(h^{-1} \cdot g \cdot h) = f(h^{-1}) \cdot f(g) \cdot f(h) \in \text{κλάση}$$

συζυγίας του $f(g)$.

Δηλαδή η κλάση συζυγίας του g απεικονίζεται στη κλάση συζυγίας του $f(g)$.

γ) Έστω $a \in G$ με $|a| = n < \infty$. Τότε:

$$|a^n| = e_G \Rightarrow f(a^n) = f(e_G) \Rightarrow [f(a)]^n = e_{G'} \Rightarrow$$

$$|f(a)| \,/\, n.$$

δ) Η ομάδα $\mathbb{Z}_{10}$ περιέχει στοιχείο τάξης 5, π.χ. το $[2]$.

Αφού φ επί, έπεται ότι $|\varphi(a)| = 5$ για κάποιο $a \in G$.

Έστω $k = |a|$. Τότε: $a^k = e \Rightarrow k \cdot \varphi(a) = 0 \Rightarrow |\varphi(a)| \,/\, k \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \,/\, k$.

Έστω τώρα $k = 5m = |a|$. Επιλέγουμε το στοιχείο $\beta = a^m \in G$, όπου προφανώς $|\beta| = 5$.

ε) Από γνωστό θεώρημα έπεται ότι $\varphi^{-1}(N') \triangleleft G$.

Θεωρούμε τώρα τον ομομορφισμό: $h : G \to G'/N'$

με: $h(g) = \varphi(g) \cdot N'$.

Επειδή η φ είναι επί, η απεικόνιση h είναι καλά ορισμένη. Ο πυρήνας της h είναι:

$$\mathrm{Ker}\, h = \{ g \in G / h(g) = N' \} = \{ g \in G / \varphi(g) \in N' \} = \varphi^{-1}(N'$$

Από το 1ο θεώρημα Ισομορφισμού Ομάδων,

$$G/\varphi^{-1}(N') \cong h(G) = G'/N'.$$

στ) Έστω $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^+$ με $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{C}^*$.

Προφανώς f επιμορφισμός με $\mathrm{Ker}\, f = S^1$.

Επομένως: $\mathbb{C}^* / \mathrm{Ker} f \cong \mathrm{Im} f \iff$

$$\mathbb{C}^*/S^1 \cong \mathbb{R}^+.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

α) Αναλύουμε αρχικά τη μετάθεση $\sigma \in S_8$ σε γινόμενο ξένων κύκλων:

$$\sigma = (1\,5\,8)(2\,4)(3\,6\,7).$$

Η τάξη μιας μετάθεσης είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τάξεων των ξένων κύκλων της και επομένως: $|\sigma| = 6$.

β) Έστω $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)$ και $\tau = (6\,7\,8\,9\,10\,11\,12)$.

Είναι: $|\sigma| = 5$, $|\tau| = 7$ και $|\sigma\tau| = 5 \cdot 7 = 35$.

γ) Έστω $\alpha = (1\,2)$ και $\beta = (1\,2\,3)$. Τότε:

$$S_3 = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Έχουμε ότι: $\langle \alpha \rangle$, $\langle \beta \rangle$, $\langle \alpha\beta \rangle = \{e, \alpha\beta\}$,

$\langle \beta\alpha \rangle = \{e, \beta\alpha\}$, $\{e\}$, S_3

οι υποομάδες της S_3.

Κανονικές Υποομάδες της S_3 είναι οι: $\{e\}$, η S_3 και η $\langle \beta \rangle$.

δ) Παίρνοντας υπόψη μας το:

$S_n = \langle (12), (12\ldots n) \rangle$ και ότι

$(12)^{-1} = (12)$ και αφού $(1234)(1432) = (1)$,

έχουμε ότι $(1234)^{-1} = (1432)$.

Επομένως:

$(12)(12)(34)(12) = (12)(34) \in H$,

$(12)(13)(24)(12) = (14)(23) \in H$,

$(12)(14)(23)(12) = (13)(24) \in H$,

$(1234)(12)(34)(1432) = (14)(23) \in H$,

$(1234)(13)(24)(1432) = (13)(24) \in H$,

$(1234)(14)(23)(1432) = (12)(34) \in H$.

Άρα: $H \triangleleft S_4$ και μάλιστα $H \cong Klein_4$.

ε) Οι τάξεις των στοιχείων της S_4 είναι οι εξής:

- (το μοναδιαίο στοιχείο)
- $6+3=9$ στοιχεία τάξης 2.
- 8 στοιχεία τάξης 3
- 6 στοιχεία τάξης 4.

ΆΣΚΗΣΗ 4

α) Έχουμε ότι: $|G| = 900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

το 2^2 αναλύεται με δύο διαφορετικούς τρόπους σε γινόμενο δυνάμεων πρώτων αριθμών: $\begin{cases} 2^2 \\ \text{και} \\ 2 \cdot 2 \end{cases}$.

Όμοια το 3^2: $\begin{cases} 3^2 \\ \text{και} \\ 3 \cdot 3 \end{cases}$ και το 5^2: $\begin{cases} 5^2 \\ \text{και} \\ 5 \cdot 5 \end{cases}$.

Οπότε:

$G \cong \mathbb{Z}/_4 \times \mathbb{Z}/_9 \times \mathbb{Z}/_{25}$, $G \cong \mathbb{Z}/_4 \times \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_{25}$,

$G \cong \mathbb{Z}/_4 \times \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_5 \times \mathbb{Z}/_5$, $G \cong \mathbb{Z}/_4 \times \mathbb{Z}/_9 \times \mathbb{Z}/_5 \times \mathbb{Z}/_5$,

$G \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_9 \times \mathbb{Z}/_{25}$, $G \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_9 \times \mathbb{Z}/_5 \times \mathbb{Z}/_5$,

$G \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_5 \times \mathbb{Z}/_5$, $G \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_2$

β) Προσδιορίζουμε τους αριθμούς m_i τέτοιους ώστε $m_1 \dots m_r \leq 30$ και $m_r \mid 12$. Επομένως:

$m_r = 1, 2, 3, 4, 6, 12$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $m_r = 12$.

  Τότε: $m_1 \dots m_{r-1} \leq 2{,}5$ και άρα $m_1 \dots m_{r-1} \leq 2$. Αφού $m_{r-1} \mid 12$, οι μόνες επιλογές για το m_{r-1} είναι 2 ή 1. Έτσι:

  $$G \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_{12} \quad \text{ή} \quad G \cong \mathbb{Z}/_{12}.$$

- $m_r = 6$.

  Τότε: $m_1 \dots m_{r-1} \leq 5$ και επειδή $m_{r-1} \mid 6$, οι μόνες επιλογές για το m_{r-1} είναι $3, 2$ ή 1.

  Έτσι:

  $$G \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_6, \; G \cong \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_6, \; G \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_6$$

  ή $G \cong \mathbb{Z}/_6$.

• $m_r = 4$.

Τότε: $m_1 \dots m_{r-1} \leq 30/4 = 7,5$ και άρα $m_1 \dots m_{r-1} \leq 7$.

Επειδή $m_{r-1} / 4$, οι μόνες επιλογές για το m_{r-1} είναι $4, 2$ ή 1.

Έτσι: $G \cong \mathbb{Z}/_4 \times \mathbb{Z}/_4$, $G \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_4$, $G \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_4$ ή $G \cong \mathbb{Z}/_4$.

• $m_r = 3$.

Τότε: $m_1 \dots m_{r-1} \leq 10$. Επειδή $m_{r-1} / 3$, οι μόνες επιλογές για το m_{r-1} είναι 3 ή 1.

Έτσι: $G \cong \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_3$, $G \cong \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_3$ ή $G \cong \mathbb{Z}/_3$.

• $m_r = 2$.

Τότε: $m_1 \dots m_{r-1} \leq 15$. Επειδή $m_{r-1} / 2$, οι μόνες επιλογές για το m_{r-1} είναι 2 ή 1. Έτσι:

$G \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2$, $G \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2$, $G \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2$ ή $G \cong \mathbb{Z}/_2$.

• $m_r = 1$. Τότε: $G = \{e\}$.

γ) Έστω ότι η αβελιανή ομάδα $(\mathbb{Q},+)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Εφόσον δεν περιέχει στοιχεία πεπερασμένης τάξης έπεται ότι θα είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα και άρα ισομορφική με κ-αντίγραφα του $\mathbb{Z}$,

δηλαδή: $\mathbb{Q} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{\kappa}$.

Έστω τώρα $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_\kappa}{q_\kappa}$ οι γεννήτορες της $\mathbb{Q}$.

Όμως τότε, για κάθε ζεύγος γεννητόρων $\frac{p_i}{q_i}, \frac{p_j}{q_j}$ θα ισχύει η ισότητα: $(p_j q_i) \cdot \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_j}{q_j} \cdot (p_i \cdot q_j) \Longleftrightarrow$

Στο $\mathbb{Q}$ ισχύουν σχέσεις της μορφής:

$(p_j q_i) \cdot \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_j}{q_j}(p_i \cdot q_j) = 0$, δηλαδή έχουμε γραμμικές εξαρτήσεις ανάμεσα σε στοιχεία της βάσης, κάτι το οποίο δεν ισχύει σε ελεύθερες ομάδες.